

---

## SMYK VE SPÁŘE MEZI SPŘAŽENÝMI ČÁSTMI BETONOVÉHO PRŮŘEZU



Jaroslav Navrátil



Lukáš Zvolánek



Libor Michalčík

---

### Abstrakt

Spřažené betonové nosníky vyrobené z prefabrikovaných předpjatých nebo železobetonových prvků a in-situ dobetonované desky se v současné době staly v praxi velmi oblíbené. Obě betonové spřažené části nosníku jsou vybetonovány v různých časech. Různé moduly pružnosti, postupné vkládání zatížení, rozdílné dotvarování a smršťování způsobují proto ve vláknech přilehlých ke spáře nestejná přetvoření a napětí. Je však třeba zajistit, aby byly obě části plně spřažené. Cílem článku je přezkoumat metody pro výpočet smykových napětí ve spáře a vyhodnotit vliv rozdílného stáří obou betonových spřažených částí na úroveň smykových napětí. Je navržena a otestována metoda alternativní k metodě použité v EC2. Doporučuje se počítat smyková napětí z rozdílu normálových sil působících na spřaženou část průřezu ve dvou sousedních řezech prvku. Bylo zjištěno, že rozdílné smrštění obou spřažených částí může významně ovlivnit rozdělení napětí. Na příkladech spřažených nosníků z praxe byla provedena řada studií.

**Klíčová slova:** spřažené betonové nosníky, smyk, spára, Eurocode

---

### 1 Smyk ve styčné ploše podle ČSN EN 1992-1-1

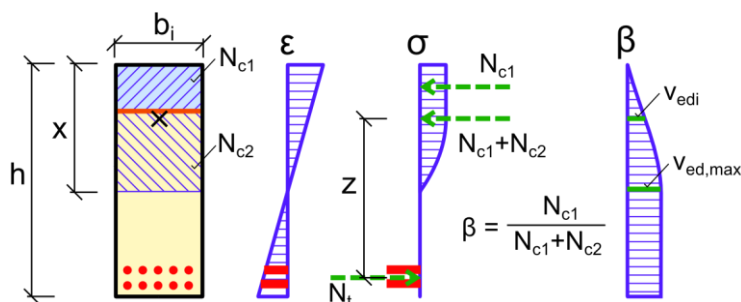
Norma ČSN EN 1992-1-1 stanoví, že návrhová hodnota smykového napětí  $v_{Edi}$  ve styčné ploše mezi oběma fázemi průřezu by měla být menší nebo rovna návrhové únosnosti styčné plochy  $v_{Rdi}$ . Návrhová hodnota smykového napětí je dána rovnicí (6.24) článku 6.2.5:

$$v_{Edi} = \beta V_{Ed} / z \cdot b_i \quad (1)$$

$V_{Ed}$  je posouvající síla,  $b_i$  je šířka v místě spřahující spáry a  $z$  je rameno vnitřních sil spřaženého průřezu. Koeficient  $\beta$  je poměr podélné síly na ploše dobetonované části průřezu k celkové podélné síle buď v tlačené, nebo v tažené oblasti průřezu, přičemž obě

síly jsou počítány v daném průřezu. Rameno vnitřních sil  $z$  a koeficient  $\beta$  si zaslouží dále detailní rozbor, zatímco návrhová únosnost styčné plochy není předmětem tohoto příspěvku.

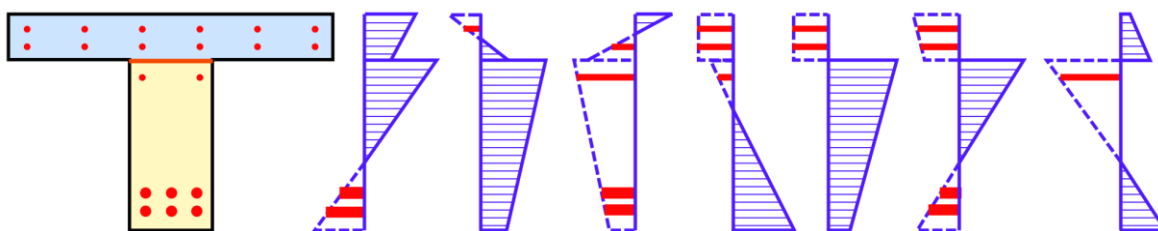
Mezi obecně přijatelná zjednodušení patří možnost použití hodnoty ramene vnitřních sil, kterou získáme z mezního stavu únosnosti při ohybu. Ta nadhodnocuje skutečné rameno vnitřních sil, viz Obr. 1. Správným řešením je uvažovat rameno vnitřních sil ze skutečného rozdělení normálových napětí po průřezu při působení uvažovaného zatížení. V takovém případě je třeba určit odezvu průřezu z předpokladů mezního stavu únosnosti, tedy že beton v tahu nepůsobí a napětí v tlačeném betonu i napětí v betonářské nebo v předpínací výztuži jsou stanovena z návrhových pracovních diagramů.



**Obr. 1** Výpočet smykového napětí ve sřahující spáře pomocí koeficientu  $\beta$

Při použití koeficientu  $\beta$  je smykové napětí pro posouzení styčné plochy vztaženo k maximálnímu smykovému napětí, které působí v místě neutrálné osy a které je dané vztahem  $V_{Ed}/zb_i$ . V případě lineárního rozdělení normálových napětí koresponduje rovnice (1) plně s obecně známou Grashofovou teorií. Pokud rovina sřahující spáry leží

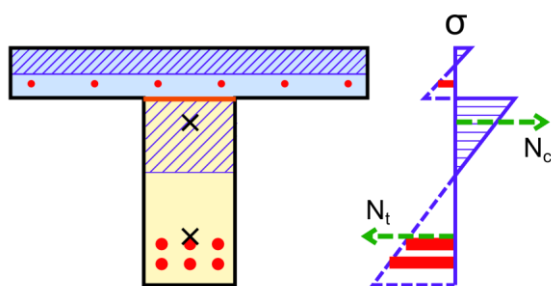
uvnitř tlačené zóny se spojitým průběhem normálových napětí nebo v souvislé tažené zóně a normálové napětí je nelineární, může být smykové napětí styčné plochy stále redukováno koeficientem  $\beta_i$ , když takové rozdělení napětí nesplňuje Grashofovy předpoklady, viz Obr. 1.



**Obr. 2** Příklady rozdělení normálových napětí s diskontinuitami

Problém nastává při diferenčním smršťování a dotvarování betonu. V takovém případě existují diskontinuity v rozdělení normálových napětí (neexistuje první derivace napětí) v místě sřahující spáry, viz Obr. 2. Je otázkou, do jaké míry může být v tomto případě použita rovnice (1) pro výpočet smykového napětí ve styčné ploše.

Jako důsledek redistribuce napětí způsobené dotvarováním a smršťováním betonu mohou dokonce vzniknout v obou fázích průřezu nesouvislé tažené a tlačené oblasti, viz Obr. 3. V takových případech může použití rovnice (1) zapříčinit významnou chybu ve výpočtu smykového napětí.



Obr. 3 Nesouvislé tažené a tlačené oblasti spřaženého průřezu

Předpokládejme, že integrujeme napětí ve všech částech tlačené oblasti a ve všech částech tažené oblasti. Tím získáme výslednice sil v tlačené respektive v tažené oblasti. Jejich vzdálenost určuje rameno vnitřních sil, které se může významně lišit od běžného případu zobrazeného v Obr. 1. Například tažená oblast ve spřažené desce posune celkovou výslednici v tahu směrem k výslednici tlačené oblasti, a tedy rameno vnitřních sil se zmenšuje. Uvažování tohoto ramene

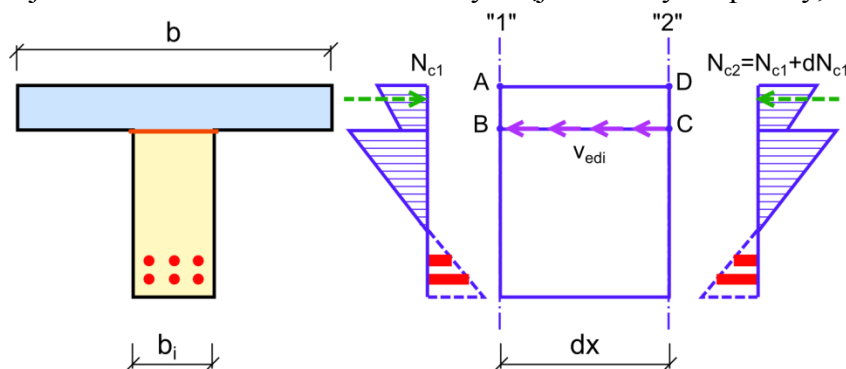
vnitřních sil v rovnici (1) je nesprávné. Rozdělení napětí po průřezu není v souladu s předpoklady Grashofovy teorie. Z těchto důvodů rovnice (1) není schopná zohlednit přerozdělení napětí po průřezu způsobené postupnou výstavbou a diferencním smršťováním a dotvarováním betonu obou fází spřaženého průřezu. V takových případech se doporučuje uvažovat konzervativní hodnotu  $\beta = 1.0$ . Níže uvedená studie dokazuje, že relativní chyba při výpočtu smykového napětí  $v_{Edi}$  může dosahovat v některých případech namáhání až 60 %.

## 2 Výpočet smykového napětí styčné plochy z rozdílu normálových sil

Jelikož výpočet podle normy EN 1992-1-1 nezohledňuje skutečné rozdělení napětí po průřezu, byl navržen alternativní výpočet smykového napětí. Průměrná velikost smykového napětí styčné plochy  $v_{Edi}$  může být vypočítána ze dvou sousedních řezů jako:

$$v_{Ed,i} = dN_c / b_i \cdot dx \quad (2)$$

$dN_c$  je rozdíl výslednic normálového napětí integrovaného po ploše na jedné fázi průřezu (prefabrikovaná část nebo spřažená deska) ve dvou sousedních řezech nosíkového prvku,  $dx$  je vzdálenost mezi sousedními řezy a  $b_i$  je šířka styčné plochy, viz Obr. 4.



Obr. 4 Výpočet smykového napětí z rozdílu normálových sil

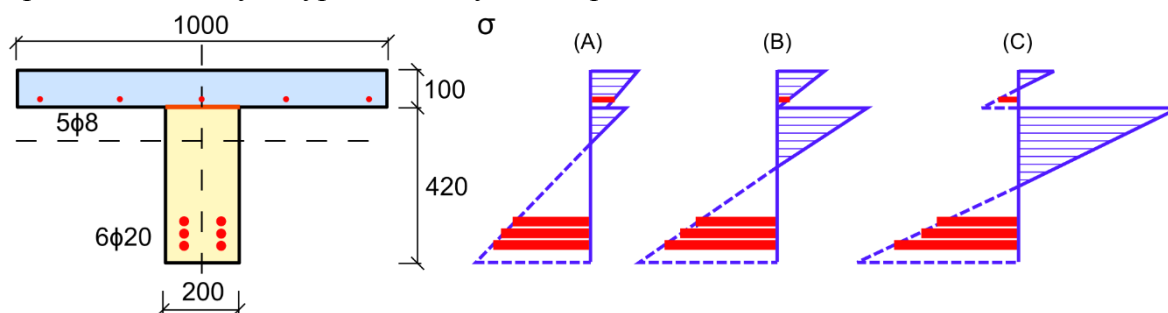
Přesnost výpočtu smykového napětí je závislá na vzdálenosti  $dx$ . Velká hodnota  $dx$  snižuje průměrné smykové napětí, zatímco zmenšováním hodnoty  $dx$  se bude smykové napětí přibližovat svému maximu. Nicméně, velmi malá hodnota

$dx$  může způsobovat numerickou nestabilitu díky citlivosti malého rozdílu normálových sil na chyby numerického výpočtu (velkých) celkových hodnot vnitřních sil. Proto byla provedena citlivostní analýza pro stanovení vhodné hodnoty  $dx$  pro běžné nosíkové

konstrukce. Výhodou této metody je, že je schopná zohlednit rozdělení napětí po průřezu způsobené postupnou výstavbou a diferenčním smršťováním a dotvarováním betonu obou fází spřaženého průřezu.

### 3 Srovnání výpočtu podle ČSN EN a z rozdílu normálových sil

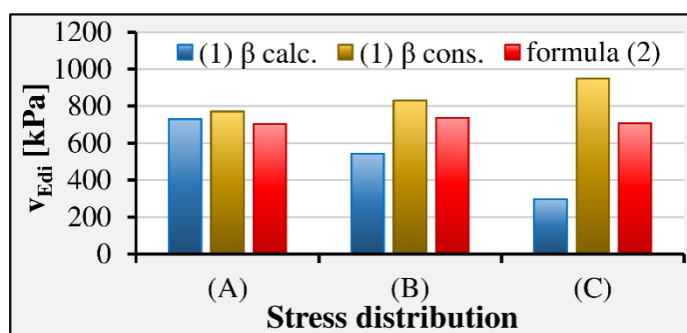
Jelikož diskontinuity průběhu normálových napětí jsou pro chování spřažených betonových průřezů charakteristické (viz Obr. 2 a Obr. 3), vyvstává otázka, jak významná chyba může nastat při výpočtu podle rovnice (1). K osvětlení této problematiky byla provedena studie, ve které byl uvažován různý průběh normálových napětí ve spřaženém průřezu. Různá rozdělení napětí byla docílena pomocí jiného stáří  $t_{ref}$  první fáze průřezu v okamžiku betonáže spřažené (druhé) fáze, viz Obr. 5. Pro zjednodušení výpočetního modelu byla redistribuce zapříčiněna pouze smršťováním a dotvarováním. Po 100 letech bylo aplikováno vnější zatížení takové, aby bylo dosaženo daného rozdělení normálového napětí a následně bylo vypočítáno smykové napětí  $v_{Edi}$ .



Obr. 5 Příčný řez a uvažované rozdělení normálového napětí

Výsledky studie jsou patrné z Obr. 6 pro tři různá rozdělení normálových napětí A, B a C. Účinek smykového napětí  $v_{Edi}$  byl určen pomocí:

- rovnice (1) s koeficientem  $\beta$  vypočítaným z poměru podélných sil – (1)  $\beta$  calc.,
- rovnice (1) s konzervativně uvažovaným koeficientem  $\beta = 1.0$  – (1)  $\beta$  cons.,
- rovnice (2) – formula (2).

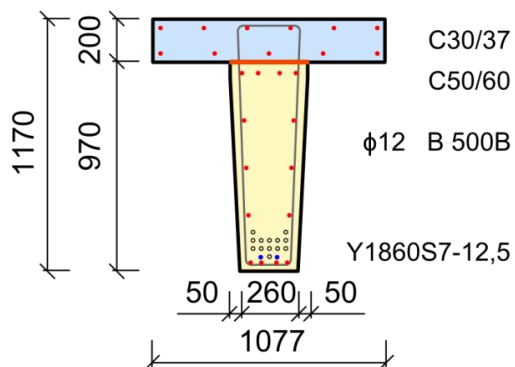


Obr. 6 Srovnání výsledků podle rovnice (1) a rovnice (2) průběh napětí C. Na druhou stranu, konzervativní přístup může nadhodnocovat skutečné smykové napětí, konkrétně o 35 % pro případ rozdělení napětí C.

Jelikož metoda výpočtu smyku z rozdílu normálových sil podle rovnice (2) není limitována předpoklady vztahenými k rozdělení normálových napětí, považujeme ji za nejsprávnější. Z uvedených výsledků lze konstatovat, že metoda s vypočítaným koeficientem  $\beta$  podhodnocuje skutečné smykové napětí ve většině případů, konkrétně s chybou 60 % pro

### 3.1 Analýza spřaženého betonového mostu

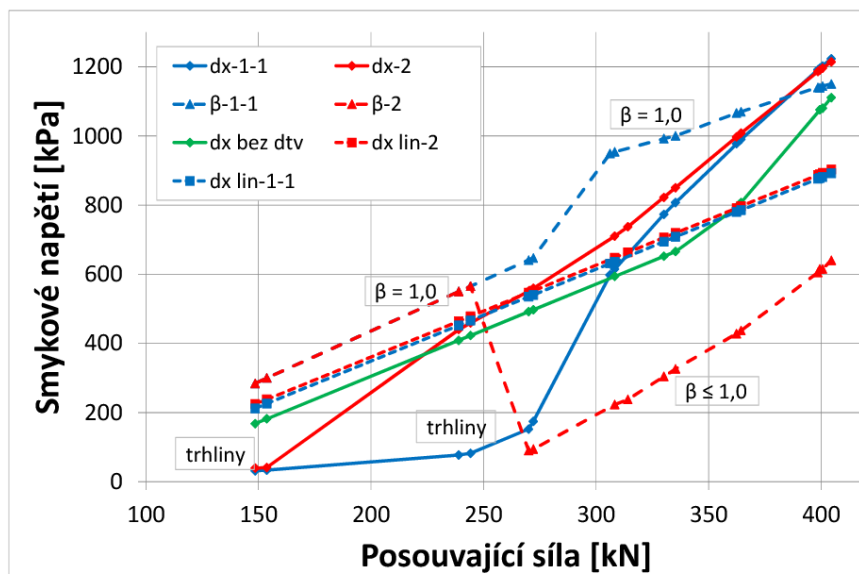
Pro ověření významnosti výše uvedených tvrzení bylo analyzováno několik příkladů reálných stavebních konstrukcí. V rámci tohoto článku uvedeme výsledky řešení spřaženého betonového mostu o jednom poli, který byl analyzován na účinky stálých, ostatních stálých a pohyblivých zatížení (EN 1991-2). Konstrukce sestává z 12 prefabrikovaných předpjatých nosníků (C50/60) se spřaženou betonovou deskou (C30/37), viz Obr. 7. Šířka mostu je 12,7 m, vzdálenost nosníků 1,077 m a jejich délka 15,8 m.



Obr. 7 Průřez spřaženého betonového mostního nosníku

Náhradní zatížení ekvivalentní vnitřním silám vznikajícím na jednom nosníku bylo určeno pomocí 3D MKP modelu. Následně byla provedena časová analýza konstrukce na prutovém modelu s následujícími fázemi výstavby: vnesení předpětí, skládka, betonáž spřažené desky (ve stáří prefa nosníků 60 dnů a alternativně 20 let), finální podpory, vnesení ostatního stálého zatížení a konec životnosti (100 roků). Dílčí součinitele zatížení byly uvažovány hodnotou 1,0, aby byla získána pouze jedna sada výsledků od stálých zatížení.

Normálová a smyková napětí byla vyhodnocena v řezu ve vzdálenosti  $d = 1.1$  m od podpory. Za účelem vyhodnocení celkového smykového napětí  $v_{Edi}$  bylo na konci životnosti mostu aplikováno pohyblivé zatížení, přičemž bylo napětí vypočteno podle ČSN EN i alternativním způsobem z rozdílu normálových sil. Některé výsledky studie jsou prezentovány v Obr. 8, kde je vyneseno smykové napětí ve spáře v daném řezu v závislosti



Obr. 8 Smykové napětí ve spáře v závislosti na posouvající síle

způsobu výpočtu z hodnoty  $\beta$  určené z poměru podélných sil na konzervativně uvažovanou hodnotu  $\beta = 1.0$ . To je zapříčiněno skutečností, že v důsledku smršťování vzniknou v desce tahy, resp. samostatná tažená a tlačenná zóna podobně jako v průběhu normálového

na posouvající síle vypočtené pro jednotlivé kombinace zatížení. Křivka označená  $\beta-2$  reprezentuje standardní řešení podle mostní normy EN 1992-2, tedy zejména reologické účinky, součinitele a metodu výpočtu podle vzorce (1). Prudký skok v průběhu křivky pro posouvající sílu cca 250 kN je způsoben změnou

napětí (C) v Obr. 5. Proto nelze určit  $\beta$  výpočtem. V případě normy EN 1992-1-1 (křivka označená  $\beta$ -1-1) je třeba použít konzervativní  $\beta = 1.0$  dokonce pro všechny hodnoty posouvající síly. Proto je možné se domnívat, že při výpočtu podle této normy dochází v důsledku většího smršťování k výraznější redistribuci napětí, což potvrdilo i vyhodnocení jeho průběhu v čase. Vzhledem k omezenému prostoru však nelze tyto výsledky zde prezentovat, stejně jako výsledky pro betonáž spřažené desky ve stáří prefabrikovaných nosníků 20 let.

Vyšší účinky smršťování podle EN 1992-1-1 lze sledovat i při výpočtu alternativním způsobem z rozdílu normálových sil, viz křivky dx-1-1 a dx-2. V důsledku smršťování vzniknou v desce po celé výšce tahy. Při uplatnění z předpokladů mezního stavu únosnosti dojde k porušení desky trhlinou (místa označena na Obr. 8) a k přerozdělení normálového napětí do výztuže desky a do prefabrikované části průřezu. S ohledem na to, že tuhost výztuže je nižší než tuhost neporušené desky, dochází k úbytku normálové síly v desce a ke snížení smykového napětí ve spáře. Pro extrémní posouvající sílu je smykové napětí určené z rozdílu normálových sil podle obou norem 1992-1-1 a 1992-2 téměř shodné. Z Obr. 8 je dále zřejmé, že při ignorování reologických účinků (křivka „dx bez dtv“) v desce tahy nevznikají a průběh smykových napětí odpovídá průběhům vypočteným při uvažování lineárně-elastického chování průřezu.

## 4 Závěr

Metoda výpočtu smykového napětí ve spřahující spáře podle ČSN EN 1992-1-1 nezohledňuje přerozdělení napětí po průřezu způsobené diferenčním smršťováním a dotvarováním betonu. V případě vypočteného koeficientu  $\beta$  metoda podhodnocuje hodnotu smykových napětí, naopak uvažování konzervativní hodnoty vede k neekonomickému návrhu. Byla navržena alternativní metoda výpočtu smykového napětí ve spáře. Výpočtem bylo prokázáno, že s ohledem na redistribuci napětí je velikost vypočtených smykových napětí závislá na smršťování a dotvarování betonu.

## Literatura

- [1] IDEA StatiCa Prestressing, *User guide*, IDEA RS s.r.o., U Vodárny 2a, 616 00 BRNO, [www.idea-rs.com](http://www.idea-rs.com).

---

**Doc. Ing. Jaroslav Navrátil, CSc.**

**Ing. Libor Michalčík**

✉ IDEA RS s.r.o.  
U Vodárny 2a, 616 00 Brno

☎ 511 205 263

☺ [navratil@idea-rs.com](mailto:navratil@idea-rs.com)

URL [www.idea-rs.com](http://www.idea-rs.com)

**Ing. Lukáš Zvolánek**

✉ Fakulta stavební VUT v Brně  
Veveří 95  
602 00 Brno

☎ 541 148 211

☺ [zvolanek.l@fce.vutbr.cz](mailto:zvolanek.l@fce.vutbr.cz)

URL [www.fce.vutbr.cz](http://www.fce.vutbr.cz)